Пријемни испит за упис на Математички факултет

Решења задатака

1. Тврђење (I) је тачно, јер ако би $x+y$ био рационалан, такав би морао да буде и y. Тврђење (II) је нетачно, јер је $0 \cdot y = 0$ рационалан број. Тврђење (III) је нетачно јер је, на пример, $(\sqrt{2})^2 = 2$. Одговор: C.

2. За $x < -5$ неједначина постаје $1 - x > -x - 5$, тј. $1 > -5$. За $-5 \leqslant x < 1$ постаје $1 - x > x + 5$, тј. $x < -2$, а за $x \geqslant 1$ се своди на $x - 1 > x + 5$, тј. $-1 > 5$. Задовољена је за $x < -2$. Одговор: B.

3. Мора бити $a + b = 7$, па се елиминацијом a из $a^2 + 4b^2 = 68$ добија једначина $5b^2 - 14b - 19 = 0$. Само једно решење ове једначине је цео број $b = -1$, па је $a = 8$ и $m = 8(-1) = -8$. Одговор: B.

4. Означимо $AM = x$, $x \in [0,1]$. Тада је тражена површина $P(x) = 3 - \frac{1}{2}x \cdot 2x - \frac{1}{2}(3 - 2x) \cdot 1 = \frac{3}{2} + x - x^2$. Ова квадратна функција достиже (на дозвољеном скупу $[0,1]$) максимум за $x = \frac{1}{2}$ и он износи $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}$. Одговор: A.

5. Због $x + 4 + 2\sqrt{x+3} = (1 + \sqrt{x+3})^2$ једначина се своди на $\sqrt{x+3} = \dfrac{x+5}{3}$. Услов дефинисаности је $x \geqslant -3$, а у том случају је и $x + 5 > 0$, па се квадрирањем и сређивањем добија еквивалентна једначина $x^2 + x - 2 = 0$ чија су решења бројеви 1 и -2. Одговор: A.

6. Због $(2^{1/2})^6 = 2^3 = 8 < 9 = 3^2 = (3^{1/3})^6$ је $2^{1/2} < 3^{1/3}$. Даље, $4^{1/4} = (2^2)^{1/4} = 2^{1/2}$. Слично као за прву неједнакост се добија $5^{1/5} < 2^{1/2}$ (јер је $25 < 32$) и $6^{1/6} < 2^{1/2}$ (јер је $6 < 8$). Највећи од датих бројева је $3^{1/3}$. Одговор: D.

7. Дата једначина је еквивалентна, редом, са $\log_{2^b}(2^{1000}) = 2^a$, $(2^b)^{2^a} = 2^{1000}$, $2^{b \cdot 2^a} = 2^{1000}$, $b \cdot 2^a = 1000$. Решења међу природним бројевима су $(a,b) \in \{(1,500), (2,250), (3,125)\}$. Одговор: D.

8. Из троугла ABD је $AB : 9 = 4 : 3$ (BO је симетрала угла ABD) па је $AB = 12$, а из троугла ACD је $AC : 12 = 4 : 3$ (CO је симетрала угла ACD), па је $AC = 16$. Обим троугла ABC је $21 + 12 + 16 = 49$. Одговор: E.

9. Означимо са h висину датог трапеза, а са x и y висине троуглова ABE и CDE (обе из темена E). Тада је $P = 25h$, $x + y = h$ и $x = 2y$, одакле је $x = \frac{2}{3}h$ и $y = \frac{1}{3}h$, па је тражена површина једнака $P - (15x + 10y) = P - \frac{40}{3}h = P - \frac{40}{3} \cdot \frac{P}{25} = \frac{7}{15}P$. Одговор: B.

10. Из правоуглог троугла MAD са углом код D једнаким 30° се добија да је висина пирамиде $MA = \dfrac{AD}{\sqrt{3}} = \dfrac{5}{\sqrt{6}}$, па је запремина $V = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{125}{36}\sqrt{6}$. Одговор: D.

11. Једини од датих бројева који је мањи од $\frac{1}{2}$ је $\cos 63^\circ$, па је $\cos 63^\circ$ тражени најмањи број. Одговор: D.

12. Како је $\sin x \neq \cos x$, то је $\dfrac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin(x - \frac{\pi}{4})} = \dfrac{(\sin x - \cos x)(\sin^2 + \sin x \cos x + \cos^2 x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)} = \dfrac{1 + \frac{1}{2}\sin 2x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2(1 + \sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}} = 2$. Одговор: C.

13. Из $18\sqrt{3} = \frac{1}{2}AB \cdot CA \sin 60^\circ$ и $AB = 2CA$ се добија $CA = 6$ и $AB = 12$. Даље је $BC^2 = 6^2 + 12^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cos 60^\circ = 108$, па је $BC = 6\sqrt{3}$, а обим троугла је $6(3 + \sqrt{3})$. Одговор: B.

14. За $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, дата једначина је еквивалентна, редом, са $\sin x = \cos^2 x$, $\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$, $\sin x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, при чему минус знак пред кореном не долази у обзир јер би резултат био мањи од -1. Дакле, постоји само једна могућност за $\sin x$ којој одговарају две могућности за $x \in [-\pi, \pi]$. Одговор: C.

15. Тражена тачка је пресек кружнице са правом одређеном тачком $A(4,-5)$ и центром $O(1,1)$ те кружнице. Једначина поменуте праве је $y=-2x+3$, па се решавањем одговарајућег система једначина добијају тачке $(2,-1)$ и $(0,3)$. Прва од њих је тражена. Одговор: А.

16. $\left(1+2+\cdots+2^{49}\right)+\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{49}}\right)=\dfrac{2^{50}-1}{2-1}+\dfrac{1-\frac{1}{2^{50}}}{1-\frac{1}{2}}=2^{50}-1+2-\dfrac{1}{2^{49}}=2^{50}+1-\dfrac{1}{2^{49}}$.
Одговор: С.

17. Нека је $z=x+iy$, при чему мора бити $z\neq -i$. Десна страна дате једнакости је реалан број, па то мора бити и лева, тј. $z+i=x+(y+1)i\in\mathbb{R}$, па је $y=-1$ и $z=x-i$, $x\neq 0$. Сада је $\dfrac{\sqrt{2}}{x}=-\sqrt{x^2+1}$, па мора бити $x<0$. Квадрирањем се добија $2=x^2(x^2+1)$, одакле $x^4+x^2-2=0$. Једино реално и негативно решење ове једначине је $x=-1$, па је $z=-1-i$ и $2z-\bar{z}=2(-1-i)-(-1+i)=-1-3i$. Одговор: А.

18. *Прво решење.* Заменом датог решења у једначину се добија $(2+i)^3+a(2+i)+b=0$ и, после сређивања, $(2+2a+b)+i(11+a)=0$. Како су a и b реални, то мора бити $2+2a+b=0$ и $11+a=0$, одакле се добија $a=-11$ и $b=20$.

Друго решење. Због $a,b\in\mathbb{R}$, друго решење је $x_2=2-i$, а како је (Виетове везе) $x_1+x_2+x_3=0$, то је треће решење $x_3=-4$. Одатле је $b=-x_1x_2x_3=20$, $-64-4a+20=0$, $a=-11$ и $ab=-220$. Одговор: В.

19. Нумеришимо столице редом од 1 до 5. Ако Пера седне на столицу број 3, остало четворо могу да се распореде произвољно, дакле на $4!=24$ начина. Ако Пера седне на столицу број 2 или 4, Жика има 3 могућности, а остало троје у сваком од тих случајева $3!=6$ могућности, па је број могућности у овом случају $2\cdot 3\cdot 6=36$. Укупан број могућности је $24+36=60$. Одговор: С.

20. Важи $nx^{n-1}y=320$, $\dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2=1280$, $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}x^{n-3}y^3=2560$. Дељењем прве релације другом се добија $\dfrac{2x}{y(n-1)}=\dfrac{1}{4}$, а дељењем друге трећом $\dfrac{3x}{y(n-2)}=\dfrac{1}{2}$. Одавде је $\dfrac{n-1}{8}=\dfrac{n-2}{6}$ $\left(=\dfrac{x}{y}\right)$, па је $n=5$. Даље се лако добија $x=2$, $y=4$ и $xyn=40$. Одговор: С.