ПРИЈЕМНИ ИСПИТ ЗА УПИС НА МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
Београд, 30.06.2021.
Време за рад је 180 минута.

1. Вредност израза $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ је:

A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** $4-2\sqrt{2}$ **E)** $4\sqrt{2}-4$ **N)** не знам

2. Површина праве правилне шестостране призме запремине 9, чија је дужина странице основе 1, износи:

A) $6\sqrt{3}$ **B)** $9\sqrt{3}$ **C)** $12\sqrt{3}$ **D)** $15\sqrt{3}$ **E)** $21\sqrt{3}$ **N)** не знам

3. Комплексних бројева z за које важи $z|z|+\overline{z}+6=0$ има:

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** више од 3 **N)** не знам

4. Ако је $n \geqslant 3$ природан број такав да је $2\binom{n+1}{4}+2=2n+\binom{n}{3}$, онда је $\binom{12}{n}$ једнако:

A) 66 **B)** 220 **C)** 495 **D)** 792 **E)** 924 **N)** не знам

5. Ако је $\dfrac{1-\sin x}{\cos x}=2$, онда је $\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$ једнако:

A) 0 **B)** $\dfrac{1}{4}$ **C)** $\dfrac{1}{2}$ **D)** $\sqrt{3}$ **E)** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ **N)** не знам

6. Домен функције $f(x)=\dfrac{\sin(\pi x)}{(1-\sqrt{(x-1)^2})\sqrt{1-\cos(2\pi x)}}-\dfrac{\arcsin(1-x)}{\sqrt{12-5x-2x^2}}$ је:

A) $(0,1)\cup(1,\frac{3}{2})$ **B)** $(0,1)\cup(1,2)$ **C)** $(-4,\frac{3}{2})$ **D)** $(1,2)$ **E)** $(-4,-3)\cup(-3,-2)\cup(-2,-\frac{3}{2})$ **N)** не знам

7. Максимална вредност израза $4^{\sin x}-4\cdot 2^{\sin x}+5$ за реалан број x је:

A) 1 **B)** 2 **C)** 3,25 **D)** 5 **E)** 5,25 **N)** не знам

8. Функција f дефинисана је на скупу природних бројева са $f(1)=1$ и једнакостима $f(2n)=2f(n)$, $f(2n+1)=4f(n)$ за сваки природан број n. Број решења једначине $f(n)=32$ је:

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9 **N)** не знам

9. Ако је S_n збир првих n чланова аритметичке прогресије и важи $\dfrac{S_3}{S_5}=\dfrac{1}{2}$, онда је $\dfrac{S_7}{S_{21}}$ једнако:

A) $\dfrac{1}{3}$ **B)** $\dfrac{1}{4}$ **C)** $\dfrac{1}{5}$ **D)** $\dfrac{1}{6}$ **E)** $\dfrac{1}{7}$ **N)** не знам

10. За реалан параметар a неједначина $a|x|+2>|x-1|$ важи за свако реално x ако и само ако је:

A) $a\geqslant 1$ **B)** $-2\leqslant a\leqslant 1$ **C)** $a\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ **D)** $a=1$ **E)** $a\in\{-1,1\}$ **N)** не знам

11. За реалан параметар a једначина $|x^2+6x-1|-a=0$ има тачно четири различита решења ако и само ако је:

A) $a>2\sqrt{10}$ **B)** $0<a<10$ **C)** $a\in(-2\sqrt{10},0)\cup(0,2\sqrt{10})$ **D)** $a>0$ **E)** $a=2\sqrt{10}$ **N)** не знам

12. Нека су x_1 и x_2 оба корена квадратне једначине $x^2-(m+3)x+m+2=0$. Све вредности реалног параметра m за које је $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>\frac{1}{2}$ и $x_1^2+x_2^2<5$ су:

A) $-2<m<0$ **B)** $-4<m<0$ **C)** $m<-4$ **D)** $m>-2$ **E)** $m>-4$ **N)** не знам

13. Скуп решења неједначине $\dfrac{1-\sqrt{1-9x^2}}{x}<1$ је:

A) $\left(0,\frac{1}{5}\right)$ **B)** $\left[-\frac{1}{3},0\right)\cup\left(\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right]$ **C)** $\left[-\frac{1}{3},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{5}\right)$ **D)** $\left(\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right]$ **E)** $\left[-\frac{1}{3},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{3}\right]$ **N)** не знам

14. Број решења система једначина $\log_{10}(xy^2)=1$, $(\log_{10}x)(\log_{10}y)=-3$ је:

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** већи од 3 **N)** не знам

15. Ако два круга имају центре на растојању 2, а њихови полупречници су $\sqrt{3}$ и 1, онда је површина њиховог пресека:

A) $\frac{5\pi}{6}-1$ **B)** $\sqrt{3}$ **C)** $\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$ **D)** $2\pi-\sqrt{3}$ **E)** $\frac{\pi}{2}$ **N)** не знам

16. Број решења једначине $\sin^2 x+3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$ у интервалу $[0,2\pi)$ је:

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** већи од 4 **N)** не знам

17. Постоје две вредности за $r>0$ такве да круг $(x-2)^2+(y-1)^2=r^2$ додирује круг $(x+2)^2+(y+2)^2=49$. Апсолутна вредност разлике тих вредности је:

A) 8 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 14 **N)** не знам

18. Нека су a,b,c,d реални бројеви. Ако полином $x^4-x^3+ax^2+bx+c$ при дељењу са x^2+d^2 даје остатак x, док при дељењу са x^2-d^2 даје остатак $-x$, онда је $\dfrac{a+b+c}{d^2}$ једнако:

A) -1 **B)** 0 **C)** 1 **D)** 2 **E)** $\frac{1}{4}$ **N)** не знам

19. Целих бројева n, таквих да је и број $\dfrac{n^3+n}{n+1}$ цео, има:

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4 **N)** не знам

20. Највећи број међу бројевима $\frac{\sqrt{7}}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{\sqrt{10!}}{3\cdot(6!)}$, $\frac{\log_2 30}{\log_3 85}$, $\frac{1+\sqrt{6}}{3}$ је:

A) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ **B)** $\frac{5}{4}$ **C)** $\frac{\sqrt{10!}}{3\cdot(6!)}$ **D)** $\frac{\log_2 30}{\log_3 85}$ **E)** $\frac{1+\sqrt{6}}{3}$ **N)** не знам

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

1. Како је $3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2$ и $11-6\sqrt{2}=(3-\sqrt{2})^2$, то је вредност израза $|\sqrt{2}-1|+|3-\sqrt{2}|=2$.

2. Површина базе призме је $B=6\sqrt{3}/4=3\sqrt{3}/2$, док је њена запремина $3=B\cdot H$, где је H висина призме, одакле следи $H=3/B=2\sqrt{3}$, те је површина призме $P=2B+6\cdot 1\cdot H=3\sqrt{3}+12\sqrt{3}=15\sqrt{3}$.

3. Нека је $z=a+ib$ за $a,b\in\mathbb{R}$. Једнакост имагинарних делова једначине даје $b\sqrt{a^2+b^2}=b$. Ако је $b=0$, онда је једначина $a|a|+a+6=0$, одакле мора бити $a<0$, те $-a^2+a+6=(3-a)(a+2)=0$ што даје јединствено решење $a=-2$, односно $z=-2$ (јер $a=3\geqslant 0$ није решење). За $b\neq 0$ је $\sqrt{a^2+b^2}=1$, те једнакост реалних делова једначине даје $2a+6=0$, одакле је $a=-3$, али одговарајуће b не постоји. Једначина има тачно једно решење, $z=-2$.

4. Како је $\binom{n+1}{4}=\frac{n+1}{4}\binom{n}{3}$, то једначина постаје $\frac{n+1}{2}\binom{n}{3}+2=2n+\binom{n}{3}$, односно $(n-1)\binom{n}{3}=4(n-1)$, одакле је $\binom{n}{3}=4$. Последња једначина је еквивалентна са $n(n-1)(n-2)=24$, што уз услов $n\geqslant 3$ даје јединствено решење $n=4$. На пример, функција $f(n)=n(n-1)(n-2)$ је строго растућа на интервалу $(2,\infty)$, док важи $f(4)=24$, или можемо расписати еквивалентну једначину $n^3-3n^2+2n-24=(n-4)(n^2+n+6)=0$ и приметити да је $n^2+n+6>0$. Коначно, $\binom{12}{n}=\binom{12}{4}=495$.

5. Функција $f(x)=\frac{1-\sin x}{\cos x}$ је непрекидна на интервалу $[-\pi/3,0]$ и важи $f(-\pi/3)=2+\sqrt{3}>2$, $f(0)=1<2$, те постоји x такво да је $f(x)=2$. Како је $\frac{1-\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}=1$, то је $\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{1}{2}$.

   Алтернативно, из услова задатка следи $1=\sin x+2\cos x=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$, где је $\varphi=\operatorname{arctg}(2)$, односно важи $\sin\varphi=2/\sqrt{5}$, $\cos\varphi=1/\sqrt{5}$. Сада је једначина $\sin(x+\varphi)=1/\sqrt{5}=\cos\varphi=\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)$, одакле следи $0=\sin(x+\varphi)-\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)=2\sin(\frac{x}{2}+\varphi-\frac{\pi}{4})\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$. Међутим, имамо $\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})\neq 0$ због $\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos x\neq 0$, те остаје $\sin(\frac{x}{2}+\varphi-\frac{\pi}{4})=0$, одакле добијамо $x=\frac{\pi}{2}-2\varphi+2k\pi$ за цео број k. Сада је $\sin x=\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi=-\frac{3}{5}$ и $\cos x=\sin 2\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi=\frac{4}{5}$, те $\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{1}{2}$.

6. Израз $\sin(\pi x)$ је дефинисан за свако $x\in\mathbb{R}$, док је израз $\arcsin(1-x)$ дефинисан за $-1\leqslant 1-x\leqslant 1$, што даје $x\in[0,2]$. Изрази који се јављају у имениоцима разломака, осим што морају бити дефинисани, морају бити и различити од нуле. Израз $1-\sqrt{(x-1)^2}=1-|x-1|$ је увек дефинисан, а једнак нули само за $x\in\{0,2\}$. Израз $\sqrt{1-\cos(2\pi x)}$ је увек дефинисан, а једнак нули само за $x\in\mathbb{Z}$. Како је $12-5x-2x^2=(x+4)(3-2x)$, израз $\sqrt{12-5x-2x^2}$ је дефинисан и различит од нуле за $x\in(-4,3/2)$. Ако обједнимо резултате добијамо домен функције $(0,1)\cup(1,\frac{3}{2})$.

7. Ако је $t=2^{\sin x}$, то тражимо максимум од t^2-4t+5 на интервалу $t\in[1/2,2]$, а како је ту функција опадајућа, максимум је за $t=1/2$ и износи 3,25.

8. Како је $f(n)/f(\lfloor n/2\rfloor)$ или 2^1 (за парно n) или 2^2 (за непарно n), то тражимо број начина на који се број $32=2^5$ може приказати као производ фактора 2 и 4, при чему је битан редослед. То је даље једнако броју начина на који се број 5 раставља као збир сабирака 1 и 2, при чему је битан редослед. Имамо 3 растављања која укључују две двојке ($2+2+1,2+1+2,1+2+2$), њих 4 са једном двојком ($2+1+1+1,1+2+1+1,1+1+2+1,1+1+1+2$), те само једно без двојки ($1+1+1+1+1$), што укупно даје 8 растављања.

9. Ако је облик аритметичке прогресије $a_n=a+(n-1)d$, онда је $S_n=an+dn(n-1)/2$. Из $2S_3=S_5$ следи $6a+6d=5a+10d$, одакле је $a=4d$ и $d\neq 0$, док је $S_{21}=21a+210d=294d=6(7a+21d)=6S_7$, те је $S_7/S_{21}=1/6$.

10. За $x\leqslant 0$ неједначина постаје $-ax+2>1-x$, те се своди на $(a-1)x<1$, што важи за свако $x\leqslant 0$ ако и само ако је $a\geqslant 1$, те је то потребан услов. Међутим, за $a\geqslant 1$ је $a|x|+2\geqslant|x|+2>|x|+1\geqslant|x-1|$, тако да је овај услов и довољан.

11. Свакако је $a \geqslant 0$, док случај $a = 0$ може дати највише два решења. Потребно је да обе једначине облика $x^2 + 6x - 1 = \pm a$ имају тачно по два решења (која су онда сва међусобно различита), што значи да су дискриминанте $36 - 4(-1 \mp a)$ позитивне, односно $10 \pm a > 0$, одакле следи $0 < a < 10$.

12. Вијетове формуле дају $x_1 + x_2 = m + 3$ и $x_1 x_2 = m + 2$. Из $\frac{1}{2} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1 x_2} = \frac{m+3}{m+2}$ имамо $m \in (-\infty, -4) \cup (-2, \infty)$, а из $5 > x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (m+3)^2 - 2(m+2) = m^2 + 4m + 5$ имамо $m \in (-4, 0)$, те у пресеку добијамо $m \in (-2, 0)$.

13. Због домена, неопходно је $x \neq 0$ и $|x| \leqslant 1/3$. За $x > 0$ неједначина постаје $1 - x < \sqrt{1 - 9x^2}$, одакле је $10x^2 - 2x < 0$, односно $0 < x < 1/5$. За $x < 0$ неједначина је $1 - x > \sqrt{1 - 9x^2}$, одакле је $10x^2 - 2x > 0$, те $x < 0$. Ако објединимо случајеве имамо $x \in [-1/3, 0) \cup (0, 1/5)$.

14. Ако је $a = \log_{10} x$ и $b = \log_{10} y$, онда су једначине $a + 2b = 1$ и $ab = -3$, одакле је $(1 - 2b)b = -3$, односно $2b^2 - b - 3 = (2b - 3)(b + 1) = 0$. Одавде постоје 2 решења $b = 3/2, a = -2$ и $b = -1, a = 3$, односно $x = 1/100, y = \sqrt{1000}$ и $x = 1000, y = 1/10$.

15. Ако су O_1 и O_2 центри кругова, а пресечне тачке кругова A и B, онда је троугао AO_1O_2 половина једнакостраничног троугла странице 2. Тражена површина се добија тако што се од збира површина исечака, првог круга са централним углом од 60°, а другог круга са централним углом од 120°, одузме површина четвороугла O_1AO_2B, што је $(\sqrt{3})^2\pi/6 + 1^2\pi/3 - 2 \cdot \sqrt{3 \cdot 1}/2 = 5\pi/6 - \sqrt{3}$.

16. Једначина се лако трансформише у $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x = 0$, те је $3 + \sqrt{10}\sin(2x + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}) = 0$, односно $\sin(2x + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}) = \frac{-3}{\sqrt{10}}$, што има 2 решења за $2x \in [0, 2\pi)$, односно 4 решења на интервалу $[0, 2\pi)$.

    Алтернативно, једначина се може трансформисати и у облик $(\sin x + \cos x)(\sin x + 2\cos x) = 0$, те како за $\cos x = 0$ нема решења (тада је $\sin^2 x = 1$), једначина постаје $(\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} x + 2) = 0$. Како једначине $\operatorname{tg} x = -1$ и $\operatorname{tg} x = -2$ имају по два решења на интервалу $[0, 2\pi)$, наведена једначина има 4 решења на $[0, 2\pi)$.

17. Центар првог круга $C_1(2, 1)$ је на растојању $\sqrt{(2 - (-2))^2 + (1 - (-2))^2} = 5$ од центра другог круга $C_2(-2, -2)$. Додирне тачке кругова налазе се у пресеку праве C_1C_2 и другог круга, чији је полупречник 7. Зато је један полупречник $r_1 = |7 - 5| = 2$, а други $r_2 = |7 + 5| = 12$, одакле је $|r_1 - r_2| = 10$.

18. Из $x^4 - x^3 + ax^2 + bx + c = (x^2 + d^2)(x^2 - x + (a - d^2)) + (b + d^2)x + c - d^2(a - d^2)$ следи $b + d^2 = 1$ и $c - ad^2 + d^4 = 0$, док из $x^4 - x^3 + ax^2 + bx + c = (x^2 - d^2)(x^2 - x + (a + d^2)) + (b - d^2)x + c + d^2(a + d^2)$ следи $b - d^2 = -1$ и $c + ad^2 + d^4 = 0$. Решавањем система се лако добија $b = 0$, $d^2 = 1$, $a = 0$ и $c = -1$, те је $\frac{a+b+c}{d^2} = -1$.

19. Како је $n^3 + n = (n + 1)(n^2 - n + 2) - 2$, а $n^2 - n + 2$ цео, то је $\frac{n^3+n}{n+1}$ цео ако и само ако је то $\frac{2}{n+1}$, што се дешава за $n + 1 \in \{-2, -1, 1, 2\}$, односно за $n \in \{-3, -2, 0, 1\}$, те их има 4.

20. Из $\frac{\sqrt{10!}}{3\cdot(6!)} = \frac{\sqrt{7}}{3} < \frac{\sqrt{7}}{2}$, те $\frac{\log_2 30}{\log_3 85} < \frac{\log_2 32}{\log_3 81} = \frac{5}{4} = \frac{\sqrt{25}}{4} < \frac{\sqrt{28}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ и $\frac{1+\sqrt{6}}{3} < \frac{1+\sqrt{7}}{3} = \frac{2+2\sqrt{7}}{6} < \frac{3\sqrt{7}}{6} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ следи да је $\frac{\sqrt{7}}{2}$ највећи од понуђених бројева.